



INSTITUTIONEN FÖR FYSIK

FRÅN LIEALGEBROR TILL RUMTIDSSYMMETRIER

David Olsson

Uppsats för avläggande av naturvetenskaplig kandidatexamen med huvudområdet fysik
2021, 180 hp
Grundnivå

Från Liealgebror till rumtidssymmetrier

DAVID OLSSON

Uppsats för avläggande av naturvetenskaplig
kandidatexamen med huvudområdet fysik

Handledare: Jakob Palmkvist
Examinator: Martina Ahlberg



GÖTEBORGS UNIVERSITET
Institutionen för fysik
Göteborg, Sverige 2021

Sammandrag

Kontinuerliga symmetrier är grundläggande inom teoretisk fysik, och beskrivs på ett naturligt sätt via Liegrupper bestående av symmetritransformationer av det underliggande fysikaliska systemet. Varje sådan grupp svarar i sin tur mot en Liealgebra som låter oss studera aspekter av Liegruppen med ytterligare matematiska tekniker. Följande arbete syftar till att sammankoppla den abstrakta teorin för Liealgebror med deras roll inom fysik genom konkreta exempel och beräkningar. Närmare bestämt härleds den begränsade Lorentzgruppen – en viktig Liegrupp inom speciell relativitetsteori – med utgångspunkt i den abstrakta Liealgebran A_3 , konstruerad från sitt Dynkindiagram. Med hjälp av explicita matrisrepresentationer fastslås ytterligare (kända) samband mellan olika Liealgebror och den begränsade Lorentzgruppen, på ett konkret sätt. Till sist noterar vi att, även om matrisalgebror är användbara för att studera Liealgebrornas roll inom fysik, behöver vi fortfarande den abstrakta, komplexa teorin för den fulla förståelsen. Följaktligen föreslås en närmre studie av våra resultat utifrån det abstrakta perspektivet som en ingång till vidare forskning.

Abstract

Continuous symmetries are fundamental in theoretical physics, and they are most naturally described using Lie groups consisting of symmetry transformations acting on the underlying physical system. Each of these groups corresponds in turn to a Lie algebra, which allows us to study aspects of the Lie group through additional mathematical techniques. In the following, we aim to connect the abstract theory of Lie algebras to their role in physics by concrete examples and calculations. In particular, the restricted Lorentz group – an important Lie group in special relativity – is derived, starting from the abstract Lie algebra A_3 as constructed from its Dynkin diagram. Using explicit matrix representations, further (known) connections between various Lie algebras and the restricted Lorentz group are established in a concrete manner. In conclusion, we note that, while matrix algebras are helpful in studying the role of Lie algebras in physics, we still need the abstract, complex theory for a full understanding. Hence, a deeper look at the abstract perspective of our results is suggested as a course for further study.

Förord

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Jakob Palmkvist, vars engagemang och förmåga att presentera abstrakt teori med imponerande klarhet har varit ovärderlig under hela arbetsprocessen. Förhoppningsvis kan nuvarande arbete föra vidare några av de insikter som jag har haft förmånen att nå under våra möten.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Teoretiska utgångspunkter	2
2.1	Liealgebror	2
2.2	Matrisalgebror	3
2.3	Från Liealgebror till Liegrupper	4
2.4	Rumtidssymmetrier	5
2.5	Dynkindiagram och Cartanmatriser	9
2.6	Chevalley-Serre-relationerna	11
2.7	Chevalley-involutionen	11
2.8	Reella former av komplexa Liealgebror	12
3	Härledning av Lorentzalgebran och relaterade strukturer	13
3.1	Baselement för $\mathfrak{sl}(4)$	13
3.2	Baselement för A_3	14
3.3	Identifiering av baselement för $\mathfrak{sl}(4)$ och A_3	18
3.4	Konstruktion av $\mathfrak{so}(4)$ och $\mathfrak{so}(1, 3)$	20
3.5	Härledning av den begränsade Lorentzgruppen	22
3.6	$\mathfrak{so}(1, 3)$ som reell form av D_2	25
3.7	Abstrakt konstruktion av $\mathfrak{so}(4)$ och $\mathfrak{so}(1, 3)$	27
4	Bortom rumtidssymmetrier	28
4.1	Gaugesymmetri	28
4.2	Supergravitation	29
5	Diskussion och slutsats	30

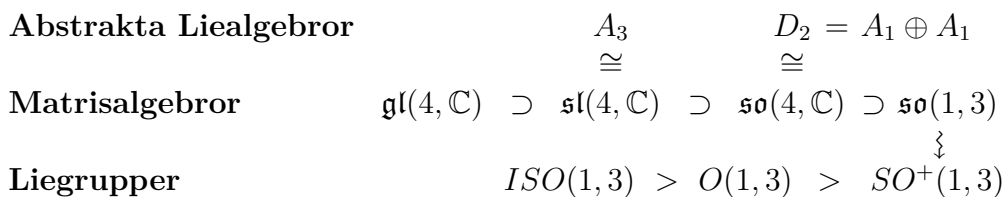
1 Inledning

Många av de mest grundläggande fysikaliska principerna antar formen av konserveringslagar, det vill säga satser om att någon storhet – så som energi eller rörelsemängd – bevaras över tid. Emmy Noether [1] visade 1918 att varje sådan lag svarar mot en kontinuerlig symmetri, vilken följaktligen kan ge oss ytterligare förståelse för det underliggande fysikaliska systemet. Liealgebror och tillhörande Liegrupper (uppkallade efter Sophus Lie) är algebraiska strukturer som låter oss studera sådana symmetrier matematiskt, och de spelar därför en viktig roll inom teoretisk fysik. Följande arbete syftar till att precisera denna roll genom konkreta exempel och beräkningar.

Med symmetri för ett (fysikaliskt) system avses i detta arbete egenskapen att systemet bevaras då det transformeras på vissa sätt. De transformationer som bevarar systemet kallas för symmetritransformationer. Vi förutsätter här att var och en av dessa har en invers, och då bildar mängden av symmetritransformationer en grupp. Ett elementärt exempel är gruppen bestående av de tre rotationer som bevarar positionen för en liksidig triangel i rummet.

För att en symmetri skall vara kontinuerlig krävs bevarande under en uppsättning infinitesimala transformationer. Triangeln i föregående exempel kan omöjligt uppfylla detta villkor eftersom dess rotationsgrupp är ändlig, men om vi ersätter triangeln med en tredimensionell sfär med centrum i origo får vi en symmetri av den sökta typen. Symmetrigruppen utgörs i detta fall av mängden av rotationer runt origo och betecknas $SO(3)$. Det är en fysikaliskt användbar konstruktion och vårt första exempel på en Liegrupp. I allmänhet bildar transformationerna för varje kontinuerlig symmetri en sådan grupp, varför Liegrupper är ett ständigt återkommande inslag i fysiken.

Den fysikaliska tolkningen av matematiken i detta arbete går, som beskrivs ovan, via Liegrupperna, men dessa strukturer kan vara komplicerade att studera direkt. Istället används ofta att varje Liegrupp har en motsvarande Liealgebra som bevarar många av gruppens egenskaper och för vilken det går att tillämpa andra matematiska tekniker. Det är Liealgebrorna som står i fokus i detta arbete. I avsnitt 2 introduceras dels de klassiska Liealgebrorna, vars element är kvadratiske matriser, dels mer abstrakta Liealgebror som konstrueras utifrån Dynkindiagram och en uppsättning relationer. Liealgebror från den senare kategorin studeras sedan i avsnitt 3, där de, med hjälp av matrisalgebror, kopplas till Liegrupper som beskriver rumtidssymmetrier. Detta sker genom att ta fram och jämföra baser för de olika algebrorna. Specifikt kopplas de abstrakta Liealgebrorna A_3 och D_2 till matrisalgebran $\mathfrak{so}(1, 3)$ (Lorentzalgebran), vilken i sin tur används för att härleda den begränsade Lorentzgruppen, $SO^+(1, 3)$, en Liegrupp bestående av symmetritransformationer som bevarar intervall i rumtiden. På så



Figur 1: De viktigaste matematiska strukturerna och relationerna som tas upp i arbetet.

vis illustreras hur den abstrakta matematiken för Liealgebror relaterar till fysikaliska modeller.

Figur 1 sammanfattar de viktigaste matematiska strukturerna och relationerna som behandlas i arbetet. Där framgår hur matrisalgebrorna används som en brygga mellan Liegrupperna och de abstrakta Liealgebrorna. Observera att relationerna i figuren är kända och att vi därmed inte gör några anspråk på nya resultat. Arbetets värde ligger istället i att dessa relationer presenteras explicit, utifrån beräkningar och resonemang som sällan annars visas.

2 Teoretiska utgångspunkter

I detta avsnitt sammanfattas de viktigaste begreppen och satserna för nuvarande arbete. Det rör sig uteslutande om välkända resultat och därför görs inga specifika källhänvisningar. Informationen är huvudsakligen hämtad från läroboken *Symmetries, Lie Algebras and Representations* av Fuchs och Schweigert [2] samt från *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras* av Frappat, Sciarrino och Sorba [3]. För den fysikaliska teorin som presenteras har även *The Quantum Theory of Fields* av Weinberg [4] samt *Mathematical Methods for Physicists* av Arfken, Weber och Harris [5] tjänat som referenser.

2.1 Liealgebror

En Liealgebra, \mathfrak{g} , är ett vektorrum som, utöver de vanliga operationerna vektoraddition och multiplikation med skalär, har en bilinjär multiplikation $(x, y) \mapsto [x, y]$, där x och y är element i \mathfrak{g} . Denna multiplikation kallas för Liealgebras bracket och måste, för alla x, y och z i \mathfrak{g} , uppfylla att

$$[x, y] = -[y, x] \quad (1)$$

(antisymmetri), samt att

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (2)$$

(Jacobi-identiteten).

Ett sätt att konstruera en Liealgebra är att utgå från en associativ algebra, det vill säga ett vektorrum med en bilinjär, associativ multiplikation, $*$, och därefter definiera bracketen som kommutatorn

$$(A, B) \mapsto [A, B] = A * B - B * A,$$

där A och B är element i vektorrummet. Vi förenklar notationen genom att låta AB beteckna $A * B$. Med bracketen ovan gäller (1) omedelbart enligt

$$[A, B] + [B, A] = AB - BA + BA - AB = 0.$$

Vidare är även Jacobi-identiteten uppfylld, ty för alla A , B och C i vektorrummet är

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &\quad + B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ &\quad + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA \\ &\quad + BCA - BAC - CAB + ACB \\ &\quad + CAB - CBA - ABC + BAC \\ &= 0. \end{aligned}$$

Avslutningsvis definierar vi några viktiga begrepp för att karaktärisera en godtycklig Liealgebra \mathfrak{g} över en kropp \mathbb{K} . Denna algebra kallas *reell* om $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ och *komplex* om $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En *bas*, \mathcal{B} , för \mathfrak{g} är en maximal mängd linjärt oberoende vektorer i \mathfrak{g} och $\dim \mathfrak{g} = |\mathcal{B}|$. Vektorerna i \mathcal{B} kommer vi konsekvent att benämna som *baselement*, även om vissa författare istället talar om *generatorer* när vektorrummet som spänns upp är en Liealgebra. Vi reserverar dock ordet "generator" för ett annat slags baselement, vilket definieras i avsnitt 2.5.

2.2 Matrisalgebror

Vektorerna i en Liealgebra är abstrakt definierade ovan utifrån axiomen som uppfylls av operationerna mellan dem. I detta arbete kommer vi dock huvudsakligen att fokusera på Liealgebror där vektorerna kan göras konkreta genom att representeras av kvadratiske matriser. Elementen kan då tolkas som linjära transformationer av ett annat vektorrum, ett så kallat representationsrum.

Mängden av alla linjära transformationer av det n -dimensionella rummet kan i sig användas för att bilda en Liealgebra. Låt $\mathfrak{gl}(n)$ vara mängden av alla $n \times n$ -matriser och låt denna mängd ligga till grund för en associativ algebra med vanlig matrismultiplikation som produkt (beteckningen

\mathfrak{gl} står för "general linear"). Då ger föregående avsnitt att $\mathfrak{gl}(n)$ bildar en Liealgebra om bracketen definieras som kommutatorn $[A, B] = AB - BA$, där A och B är matriser i $\mathfrak{gl}(n)$.

När vi väl har den allmänna algebran av linjära transformationer kan ytterligare Liealgebror konstrueras genom att identifiera delmängder till $\mathfrak{gl}(n)$ som är slutna under samma bracket. En sådan algebra är $\mathfrak{sl}(n)$, vilken består av alla spårlösa $n \times n$ -matriser. Att $\mathfrak{sl}(n)$ är en Liealgebra följer av att spåret av kommutatorn av två godtyckliga spårlösa matriser A och B är 0 enligt

$$\mathrm{tr}[A, B] = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}BA = \mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}AB = 0.$$

En annan delalgebra till $\mathfrak{gl}(n)$ är algebran av alla antisymmetriska $n \times n$ -matriser, $\mathfrak{so}(n)$. Mer allmänt kommer vi att studera $\mathfrak{so}(p, q)$, vilket är algebran bestående av de $(p + q) \times (p + q)$ -matriser, M , som uppfyller villkoret

$$\eta M = -M^T \eta$$

där η är en så kallad metrisk tensor med signatur (p, q) , representerad av matrisen

$$\begin{pmatrix} -E_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & E_q \end{pmatrix}.$$

Specifikt kommer vi att fokusera på Lorentzalgebran, $\mathfrak{so}(1, 3)$, för vilken

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Minkowski-metrika). Denna algebra spelar en särskilt viktig roll inom fysiken, inte minst eftersom den kan användas för att härleda den begränsade Lorentzgruppen, $SO^+(1, 3)$, vars element svarar mot Lorentztransformationer av rumtiden. I avsnitt 3.5 utförs denna härledning explicit utifrån teori som presenteras nedan.

2.3 Från Liealgebror till Liegrupper

En Liegrupp är en differentierbar mångfald med gruppstruktur. För våra ändamål räcker det dock att betrakta Liegrupper som ett slags kontinuerliga grupper vars generatorer beror på en reell parameter (i allmänhet kan generatorerna emellertid även bero på flera oberoende, komplexa parametrar). Exempelvis kan matriserna

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– där $\theta \in \mathbb{R}$ – tolkas som generatorerna för rotationsgruppen $SO(3)$; vårt inledande exempel på en Liegrupp. Matriserna $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ och $R_z(\theta)$ svarar här mot rotationer runt x -, y - respektive z -axeln, och genom att ta produkter av dessa element erhålls samtliga rotationer i \mathbb{R}^3 som håller origo fixt.

I det följande behandlas enbart Liegrupper bestående av reella, inverterbara $n \times n$ -matriser, där gruppoperationen är matrismultiplikation. Sådana grupper används ofta för att studera kontinuerliga symmetrier för fysikaliska system och matriselementen svarar då mot linjära symmetritransformationer. Inskränkningen till matrisgrupper öppnar upp för en naturlig avbildning mellan Liealgebror och Liegrupper. Om G är en Liegrupp av matriser finns nämligen en unik Liealgebra, \mathfrak{g} , bestående av matriserna, M , sådana att $e^{\theta M} \in G$, där θ är en reell parameter. Uttrycket $e^{\theta M} \equiv \exp(\theta M)$ definieras här – i analogi med den vanliga exponentialfunktionen – som potensserieutvecklingen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k M^k}{k!}, \quad (3)$$

vilken kan visas konvergera. Om vi istället utgår från \mathfrak{g} och *exponentierar* dess element via (3) får vi tillbaka en Liegrupp, dock inte nödvändigtvis G själv. Faktum är att exponentiering kan användas för att ta fram en Liegrupp från vilken reell Liealgebra av matriser som helst. Observera att om $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ är en bas för en sådan algebra, \mathfrak{h} , bildar $\{\exp(\phi B_i) \mid \phi \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ en fullständig uppsättning generatorer för den Liegrupp, H , man får genom exponentiering av \mathfrak{h} . Detta svarar mot att ett godtyckligt element i H kan skrivas som en produkt av de exponentierade elementen i \mathcal{B} . Att så är fallet följer av att

$$\prod_{i=1}^n \exp(\phi_i B_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \phi_i B_i\right) = \exp\left(\theta \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\theta} B_i\right) \equiv \exp(\theta M),$$

där θ är en reell parameter och M är en godtycklig linjärkombination av baselementen i \mathfrak{h} , så att produkten ovan är ett godtyckligt element i H . Det räcker alltså att exponentiera en bas för en Liealgebra för att entydigt bestämma motsvarande Liegrupp.

2.4 Rumtidssymmetrier

Rumtidssymmetri är egenskapen att bevaras under en given uppsättning transformationer av rumtiden. Särskilt Lorentztransformationerna är av

intresse inom fysik, eftersom de svarar mot koordinatbyten sådana att ljushastigheten i vakuum är den samma i alla icke-accelerande koordinatsystem (alla *inertialsystem*), i enlighet med den speciella relativitetsteoris andra postulat. Matematiskt kan Lorentztransformationerna definieras som de transformationer av rumtiden som fixerar origo och bevarar avståndet mellan två godtyckliga händelser, H_1 och H_2 . Detta avstånd är en skalär kvantitet som kallas intervall. Om koordinaterna för H_1 är (t_1, x_1, y_1, z_1) och koordinaterna för H_2 är (t_2, x_2, y_2, z_2) , i ett givet inertialsystem, ges intervallet händelserna emellan av

$$\sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2},$$

där $\Delta t = |t_2 - t_1|$, $\Delta x = |x_2 - x_1|$, $\Delta y = |y_2 - y_1|$ och $\Delta z = |z_2 - z_1|$. En godtycklig Lorentztransformation, Λ , måste då uppfylla att

$$\sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2},$$

där $\Delta t' = |\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)|$, $\Delta x' = |\Lambda(x_2) - \Lambda(x_1)|$, $\Delta y' = |\Lambda(y_2) - \Lambda(y_1)|$ och $\Delta z' = |\Lambda(z_2) - \Lambda(z_1)|$. Kvantiteter som, likt intervallet mellan två händelser, lämnas oförändrade under samtliga Lorentztransformationer sägs vara *Lorentzinvarianta*, eller ekvivalent, uppvisa *Lorentzsymmetri*.

Standardexemplet på en Lorentztransformation utgår från en händelse vars koordinater är (t, x, y, z) i ett inertialsystem, S , och (t', x', y', z') i ett annat inertialsystem, S' . Inertialsystemet S' antas röra sig med hastigheten v i x -led i förhållande till S och dessutom antas origo för de båda systemen sammanfalla vid $t = 0$. Då ges Lorentztransformationen som transformerar koordinater i S till koordinater i S' av ekvationssystemet

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - xv/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (4)$$

där c är ljushastigheten i vakuum och $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (gamma faktorn). Detta är ett exempel på en så kallad Lorentzboost, det vill säga en Lorentztransformation som utför ett koordinatbyte mellan två inertialsystem som rör sig linjärt med konstant hastighet i förhållande till varandra.

Mängden av samtliga Lorentztransformationer bildar en Liegrupp som betecknas $O(1, 3)$ och är känd som Lorentzgruppen. Den kan tolkas som en uppsättning 4×4 -matriser med matrismultiplikation som gruppoperation. Om koordinaterna för en händelse är (ct, x, y, z) i S respektive (ct', x', y', z') i S' (observera faktorn c som konverterar tidsangivelsen till längdenheter),

så är matrisen för koordinatbyte mellan systemen

$$K_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta svarar alltså mot Lorentzboosten (4), vilket framgår av att

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - xv/c) \\ \gamma(x - vt') \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - xv/c) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}.$$

Motsvarande Lorentzboostar i y - respektive z -led ges av matriserna

$$K_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } K_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

I nuvarande arbete finns det dock anledning att uttrycka de nyss definierade boostmatriserna på en form som involverar hyperboliska funktioner. För detta behöver vi definiera *rapiditeten*, θ , mellan S och S' , vilken ges av

$$e^\theta = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right),$$

där v , likt tidigare, är hastigheten för S' relativt S . Rapiditeten är följaktligen ett alternativt mått på hastigheten mellan systemen, men till skillnad från v kan θ anta vilket reellt värde som helst. Från definitionen av rapiditet går det att härleda sambanden $\gamma = \cosh \theta$ och $\gamma v/c = \sinh \theta$, vilket ger de sökta boostmatriserna

$$K_x = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K_y = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & -\sinh \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$K_z = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Produkten av två av boostmatriserna ovan är inte nödvändigtvis en ny Lorentzboost och alltså måste det finnas andra typer av transformationer i Lorentzgruppen. Närmare bestämt omfattar $O(1, 3)$ även rotationer, spegling av rummet samt tidsomvändning. Rotationerna genereras av de tre rotationsmatriserna

$$J_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilka, i tur och ordning, har x -, y - respektive z -axeln som rotationsaxel. Spegling av rummet kallas för en paritetstransformation och åstadkoms genom multiplikation med matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

vilken växlar tecken på rumskoordinaterna. På motsvarande sätt omvänds tiden via matrisen

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

som alltså växlar tecken på tidskoordinaten. Vi kan även kombinera en paritetstransformation med tidsomvändning via produkten PT , vilken är lika med det negativa identitetselementet, $-E_4$.

De nyss nämnda matriserna för boostar, rotationer, paritetstransformation och tidsomvändning bildar en fullständig uppsättning generatorer för $O(1, 3)$, så att

$$O(1, 3) = \langle K_x, K_y, K_z, J_x, J_y, J_z, P, T \rangle.$$

Lorentzgruppen utgör emellertid bara en delgrupp av de rumtidstransformationer som bevarar intervall. Detta beror på att Lorentztransformationer håller origo fixt. Om vi även möjliggör förflyttning av origo genom att tillåta translationer får vi den fullständiga gruppen av transformationer som bevarar avstånd i rumtiden, den så kallade Poincarégruppen, $ISO(1, 3)$

(beteckningen syftar på att gruppelmenten är isometrier av rumtiden). Elementen i denna grupp kallas Poincarétransformationer och kvantiteter som lämnas oförändrade under dessa transformationer sägs uppvisa Poincarésymmetri eller vara Poincaréinvarianta, i analogi med terminologin för Lorentzgruppen. Både Poincaré- och Lorentzgruppen är viktiga inom fysik, men i många sammanhang vill vi utesluta paritetstransformationer och tidsomvändningar och då används istället *den begränsade Lorentzgruppen*

$$SO^+(1, 3) = \langle K_x, K_y, K_z, J_x, J_y, J_z \rangle.$$

Bokstaven "S" står för "special" och syftar på att matriserna i $SO^+(1, 3)$ skall ha determinant 1, vilket exkluderar P och T . Plustecknet i beteckningen indikerar att tidskoordinaten efter en transformation aldrig får växla tecken, vilket förhindrar elementet $-E_4$ (vars determinant är 1). Observera att $SO^+(1, 3)$ är en delgrupp av $O(1, 3)$, vilken i sin tur är en delgrupp av $ISO(1, 3)$, och detta är precis de relationer som presenteras för Liegrupperna i figur 1.

De fysikaliska lagarnas invarians under Lorentztransformationer kan tas som den grundläggande principen för speciell relativitetsteori. Lorentzgruppen, och i förlängningen även Poincarégruppen, spelar följaktligen viktiga roller även inom utvidgningarna av speciell relativitetsteori till allmän relativitetsteori samt kvantfältteori. De rumtidssymmetrier och motsvarande Liegrupper som tagits upp i detta avsnitt är därmed några av de mest fundamentala koncepten inom teoretisk fysik.

2.5 Dynkindiagram och Cartanmatriser

Dynkindiagram gör det möjligt att representera vissa Liealgebror grafiskt i form av en uppsättning numrerade noder förbundna med streck och pilar. Utifrån detta kan vi definiera mer abstrakta Liealgebror än de matrisalgebror som har diskuterats hittills. Notera att teorin som följer förutsätter en algebraiskt sluten kropp. De Liealgebror som tas upp är därmed alla komplexa. Vi inskränker oss även till Liealgebror med ändlig dimension.

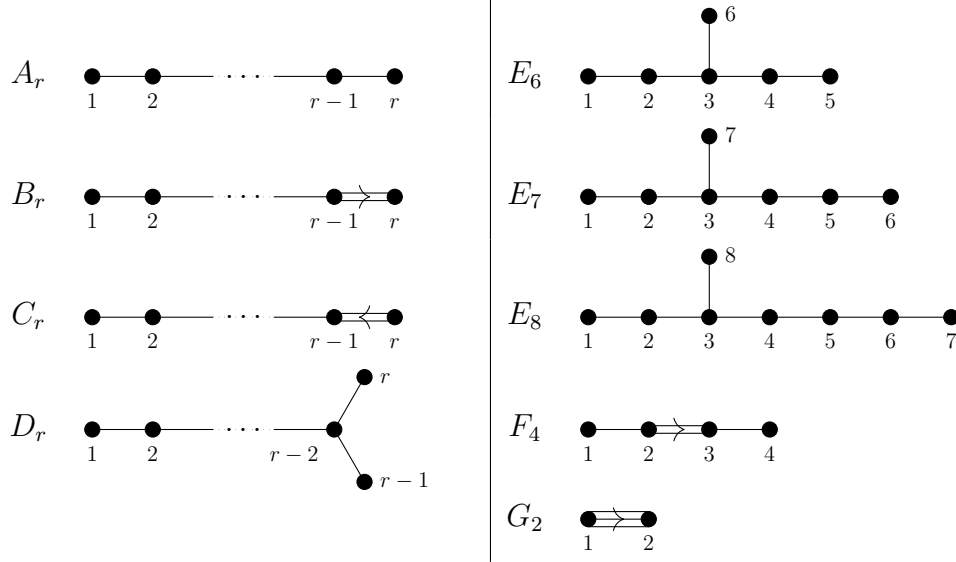
Dynkindiagrammen och deras motsvarande Liealgebror tillhör huvudsakligen fyra klasser som betecknas A_r , B_r , C_r och D_r , där r svarar mot antalet noder. Exempelvis är Dynkindiagrammet för A_2



Den karaktäristiska formen på Dynkindiagrammen för samtliga klasser visas i den vänstra kolumnen av tabell 1.

Var och en av de nyss nämnda klasserna kan alla studeras via isomorfa matrisalgebror definierade utifrån enkla villkor på de ingående matriserna, men det finns också fem så kallade exceptionella Liealgebror som inte låter

Tabell 1: Dynkindiagrammen för de enkla, ändligtdimensionella, komplexa Liealgebrorna.



sig kategoriseras enligt ovan och vars matrisrepresentationer ofta är mer komplicerade. Dessa algebror presenteras i den högra kolumnen av tabell 1.

Noderna i Dynkindiagrammet för en Liealgebra \mathfrak{g} symboliserar generatorer, det vill säga vektorer i \mathfrak{g} sådana att varje element i \mathfrak{g} kan uttryckas genom multiplikation, addition samt bracketar vektorerna emellan. Generatorerna är med andra ord ett slags baselement vilka – till skillnad från vanliga baselement – även kan kombineras genom bracketar. Specifikt svarar den i :e noden i ett Dynkindiagram mot tre generatorer, vilka betecknas h_i , e_i och f_i . Generatorerna för A_2 är alltså h_1 , e_1 , f_1 , h_2 , e_2 och f_2 . Generellt genereras en Liealgebra av $3r$ generatorer, där r kallas för Liealgebrans rang och är lika med antalet noder i algebrans Dynkindiagram.

Linjerna mellan noderna i ett Dynkindiagram ger ytterligare information om Liealgebrans struktur. Om en Liealgebra \mathfrak{g} har ett sammanhängande Dynkindiagram är \mathfrak{g} enkel. Det betyder att \mathfrak{g} saknar äkta ideal. Intuitivt innebär detta att vi kan ta oss mellan vilka två nollskilda element som helst i \mathfrak{g} via lämpliga bracketar. Om Dynkindiagrammet istället består av två eller fler isolerade delar är \mathfrak{g} halvenkel, vilket betyder att den är en direkt summa av enkla Liealgebror.

De halvenkla, komplexa Liealgebrorna klassificeras fullständigt av Dynkindiagrammen. För att studera generatorerna för en sådan Liealgebra närmre är det dock, som vi skall se, fördelaktigt att skriva Dynkindiagrammet på ekvivalent form som en så kallad Cartanmatris, vilket är en speciell $r \times r$ -matris, där r är rangen för algebran. Gemensamt för dessa

matriser är att element längs huvuddiagonalen är lika med 2 medan övriga element är mindre än eller lika med 0. Den exakta matrisen är unik för respektive Dynkindiagram, upp till numrering av noderna. Specifikt för A_2 är Cartanmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6 Chevalley-Serre-relationerna

Generatorerna som identifieras från Dynkindiagrammet för en komplex, halvenkel Liealgebra \mathfrak{g} uppfyller vissa villkor som involverar elementen i dess Cartanmatris, A . Dessa villkor består dels i Chevalley-relationerna,

$$[h_i, h_j] = 0, \quad (5)$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij}e_j, \quad (6)$$

$$[h_i, f_j] = -A_{ij}f_j \quad (7)$$

och

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j, \quad (8)$$

dels i Serre-relationerna

$$(\text{ad}_{e_i})^{1-A_{ij}}(e_j) = 0 \quad (9)$$

och

$$(\text{ad}_{f_i})^{1-A_{ij}}(f_j) = 0, \quad (10)$$

där $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ är en avbildning som för två element, x och y i \mathfrak{g} , definieras genom $y \mapsto [x, y]$. Med $(\text{ad}_x)^k(y)$ menas att ad_x skall sättas samman med sig själv k gånger. Sammantaget benämns ekvationerna ovan som Chevalley-Serre-relationerna.

2.7 Chevalley-involutionen

Givet en Liealgebra, \mathfrak{g} , konstruerad från ett Dynkindiagram med generatorer e_i , f_i och h_i kan vi definiera en särskild automorfi (det vill säga en isomorfi från en algebra till sig själv), $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ enligt

$$e_i \mapsto -f_i, \quad f_i \mapsto -e_i \quad \text{och} \quad h_i \mapsto -h_i. \quad (11)$$

Denna avbildning är känd som *Chevalley-involutionen* och skall visa sig vara ett användbart verktyg för att studera abstrakt definierade Liealgebror. Att σ är en involution betyder att den är sin egen invers, så att $\sigma(\sigma(x)) = x$ för alla $x \in \mathfrak{g}$. Observera att det faktum att σ är en automorfi implicerar att $\sigma(e_i)$, $\sigma(f_i)$ och $\sigma(h_i)$ uppfyller Chevalley-Serre-relationerna, likt de

ursprungliga generatorerna. Detta kan enkelt verifieras genom att ersätta generatorerna i ekvation (5) till (10) med deras avbildningar. Exempelvis är

$$\begin{aligned} [\sigma(e_i), \sigma(f_j)] &= [-f_i, -e_j] = -[e_j, f_i] \stackrel{(8)}{=} -\delta_{ji}h_i \\ &= \delta_{ji}\sigma(h_i), \end{aligned}$$

så att (8) gäller för de avbildade generatorerna.

Fixpunktsmängden av σ definieras som $\{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = x\}$ och bildar den så kallade maximala, kompakta delalgebran till \mathfrak{g} . Det är den största äkta delalgebran som samtidigt är Lielagebran till en kompakt Liegrupp (sådana Liegrupper kännetecknas av att deras parametrar är definierade över slutna intervall). Vidare ges en bas till denna delalgebra av $\{e_i + \sigma(e_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, r-1, r\}\}$, där r är rangen för \mathfrak{g} . Konstruktionen av delalgebror via Chevalley-involutioner illustreras genom ett konkret exempel i avsnitt 3.7 och diskuteras även ur ett fysikaliskt perspektiv i avsnitt 4.2.

2.8 Reella former av komplexa Liealgebror

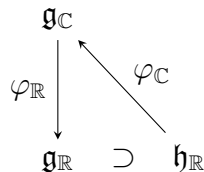
Teorin som beskrivs i avsnitt 2.5 förutsätter att Liealgebrorna är definierade över de komplexa talen. Inom fysik är vi dock ofta mer intresserade av reella Liealgebror, svarande mot Liegrupper vars element beror av reella parametrar. Därmed behövs verktyg för att koppla samman de komplexa Liealgebrorna med de reella. Detta leder oss i det följande till att definiera begreppet *reell form*, vilket, på ett precist sätt, öppnar upp för sådana kopplingar.

Med utgångspunkt i en komplex Liealgebra, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, går det alltid att bilda en reell motsvarighet genom att betrakta $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ som en algebra över \mathbb{R} istället för över \mathbb{C} . Den nya algebran, $\varphi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \equiv \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, kallas för realifikationen av $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Sedda som mängder av vektorer är $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ och $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ identiska, men i och med att $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ enbart tillåter reella linjärkombinationer krävs dubbelt så många baselement för att spänna upp denna algebra jämfört med $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Detta blir tydligt om vi låter $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_d\}$ vara en bas för den komplexa algebran. Då är $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{b_1, \dots, b_d\} \cup \{ib_1, \dots, ib_d\}$ en bas för dess realifikation, och vi ser omedelbart att $\dim(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = 2d = 2 \cdot \dim(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

Om vi istället vill gå från en reell Liealgebra, \mathfrak{g} , till en komplex kan vi använda avbildningen

$$\varphi_{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x + yi,$$

där x och y är godtyckliga element i \mathfrak{g} . Detta avbildar $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ på $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{x + yi \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$, där $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ kallas för komplexifikationen av \mathfrak{g} . Komplexifikationen av en Liealgebra utgör alltså en ny mängd av vektorer (till skillnad från en realifikation som ju består av samma element som den ursprungliga



Figur 2: Relationerna mellan en komplex Liealgebra, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, dess realifikation, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ och en reell form, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, av $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Avbildningarna $\varphi_{\mathbb{R}}$ och $\varphi_{\mathbb{C}}$ svarar mot att "realifiera" respektive att "komplexifiera" i enligt med vad som beskrivs i den löpande texten.

algebran). Om vi tillåter komplexa linjärkombinationer spänns $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ upp av samma bas som \mathfrak{g} . Följaktligen är den komplexa dimensionen för $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ lika med dimensionen för \mathfrak{g} . Likt tidigare kan $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ emellertid även betraktas som en reell algebra, och då blir dimensionen den dubbla.

Utifrån terminologin ovan kan vi slutligen formulera den sökta definitionen. En *reell form*, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, av en Liealgebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ är en reell Liealgebra sådan att komplexifikationen av $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ är lika med $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Om $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ är realifikationen till $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, är vidare alla reella former delalgebror till $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. De nyss nämnda relationerna sammanfattas i figur 2.

3 Härledning av Lorentzalgebran och relaterade strukturer

I avsnitt 2 presenterades hur Liealgebror kan bildas, dels genom att identifiera delalgebror till $\mathfrak{gl}(n)$, dels genom att utgå från Dynkindiagram och tillhörande Cartanmatriser. Nedan konstrueras en och samma Liealgebra på båda sätt, i syfte att koppla samman de två perspektiven. För detta fokuserar vi på $\mathfrak{sl}(4)$ och dess isomorfa Liealgebra A_3 . Att dessa algebror i grunden är ekvivalenta visas explicit genom att skriva upp baselement som spänner upp den ena algebran och relatera dessa till motsvarande baselement för den andra. Den matrisrepresentation som därmed definieras används sedan genomgående i resten av detta avsnitt som ett verktyg för att påvisa samband mellan olika algebraiska strukturer, med särskilt fokus på Lorentzalgebran och den begränsade Lorentzgruppen.

3.1 Baselement för $\mathfrak{sl}(4)$

En naturlig bas, \mathcal{B} , till $\mathfrak{gl}(4)$ består av de sexton möjliga 4×4 -matriser där precis ett matriselement är lika med 1 och övriga är lika med 0. För att skapa en bas till delalgebran, $\mathfrak{sl}(4)$, av spårlösa 4×4 -matriser räcker det att göra en lämplig ersättning av de fyra diagonala matriserna i \mathcal{B} , ty dessa

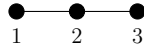
är de enda baselementen med nollskilda spår. I den bas som vi kommer att använda för $\mathfrak{sl}(4)$ har de fyra diagonala matriserna i \mathcal{B} ersatts av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

som ju både är spårlösa och linjärt oberoende. Notera att denna bas har ett element färre än \mathcal{B} , så att $\dim(\mathfrak{sl}(4)) = 15$.

3.2 Baselement för A_3

Dynkindiagrammet för A_3 är



och från detta ser vi att A_3 är en algebra med nio generatorer; tre för varje nod. Generatorerna för nod i betecknas, likt tidigare, h_i , e_i och f_i . Att dessa element genererar A_3 betyder här att alla element i A_3 kan skrivas som linjärkombinationer av h_i , e_i och f_i , samt av bracketar dem emellan. Den bas vi nu söker skall dock generera algebran även när vi inskränker oss till att enbart ta linjärkombinationer av baselementen (likt basen vi fann för $\mathfrak{sl}(4)$). Mängden av generatorer ovan är linjärt oberoende, vilket ger oss de första nio elementen i basen, men även bracketar av dessa generatorer kan ingå som baselement. Vår metod för att konstruera den sökta basen är följaktligen att identifiera möjliga bracketar och från dessa välja ut element som – tillsammans med de nio ursprungliga generatorerna – bildar en maximal, linjärt oberoende mängd i A_3 .

När vet vi att en linjärt oberoende delmängd, \mathcal{M} , av A_3 är maximal (så att $|\mathcal{M}| = \dim(A_3)$)? Låt $\llbracket n \rrbracket$ beteckna mängden av bracketar som involverar n generatorer (exempelvis är $[e_1, [e_2, e_3]] \in \llbracket 3 \rrbracket$), och låt $\llbracket 1 \rrbracket$ vara mängden av generatorer. Gör induktionsantagandet att varje element i $\llbracket 1 \rrbracket \cup \llbracket 2 \rrbracket \cup \dots \cup \llbracket n \rrbracket$ är en linjärkombination av element i \mathcal{M} . Då kan ett godtyckligt element i $\llbracket n+1 \rrbracket$ skrivas $[a, b]$, där $a \in \llbracket p \rrbracket$, $b \in \llbracket q \rrbracket$ och $p+q = n+1$. Både p och q är mindre än eller lika med n , så induktionsantagandet ger att a och b kan skrivas som linjärkombinationer:

$$a = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i \quad \text{respektive} \quad b = \sum_{j=1}^l d_j \beta_j,$$

där α_i och β_j är element i \mathcal{M} . Följaktligen är

$$\begin{aligned} [a, b] &= \left[\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i, \sum_{j=1}^l d_j \beta_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i d_j [\alpha_i, \beta_j], \end{aligned}$$

varav sista likheten följer av bracketens bilinjäritet. Om $[\alpha_i, \beta_j]$ är en linjärkombination av element i \mathcal{M} gäller alltså det samma för elementen i $\llbracket n+1 \rrbracket$. Med andra ord är \mathcal{M} maximal om varje bracket mellan *två* av dess element tillhör det linjära höljet av \mathcal{M} .

Det linjära oberoendet är svårare att visa än maximaliteten, för en mängd av abstrakta baselement. I det första skedet kan vi därför enbart välja ut en uppsättning element som vi inte kunnat visa att de är linjärkombinationer av varandra. Beviset för att denna mängd är linjärt oberoende kommer först när vi kopplar baselementen för A_3 till baselementen för $\mathfrak{sl}(4)$.

Antisymmetrin, som ju gäller för samtliga Liealgebror, medför att $[a, b]$ och $[b, a]$ – för alla element, a och b , i A_3 – är varandras negationer. Nedan behandlas därför antingen $[a, b]$ eller $[b, a]$, men inte båda. Dessutom utesluter vi direkt bracketar mellan ett och samma element (till exempel $[a, a]$) eftersom antisymmetrin implicerar att dessa är 0.

Vi påminner oss om att generatorerna för A_3 måste uppfylla Chevalley-Serre-relationerna. Cartanmatrisen är i det här fallet

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Den första Chevalley-relationen, (5), ger oss omedelbart att inga bracketar mellan h_i och h_j kan bilda baselement. Vidare ger relation (6) att bracketar mellan h_i och e_j är multiplar av generatorer för A_3 (till exempel är $[h_1, e_1] = 2e_1$) och motsvarande resultat gäller även mellan h_i och f_j enligt relation (7). Inte heller bracketar mellan e_i och f_j kan bilda baselement, vilket följer av relation (8) ($[e_i, f_j]$ är alltid en multipel av h_j). Sammantaget implicerar Chevalley-relationerna att, bland elementen i $\llbracket 2 \rrbracket$, har endast bracketar på formen $[e_i, e_j]$ och $[f_i, f_j]$ potential att bilda baselement.

Om vi tar hänsyn till antisymmetri svarar elementen på formen $[e_i, e_j]$ mot tre möjliga baselement: $[e_1, e_2]$, $[e_2, e_3]$ och $[e_1, e_3]$. Den sista av dessa elimineras via relation (9), ty

$$[e_1, e_3] = \text{ad}_{e_1}(e_3) = (\text{ad}_{e_1})^{1-A_{13}}(e_3) = 0.$$

De två återstående elementen är dock tänkbara som baselement. På liknande sätt får vi de två kandidaterna $[f_1, f_2]$ och $[f_2, f_3]$ efter att ha eliminerat $[f_1, f_3]$ via relation (10).

Hittills har vi enbart beaktat element som går att bilda som en bracket mellan två av de ursprungliga generatorerna för A_3 , och detta gav oss de fyra tänkbara baselementen $[e_1, e_2]$, $[e_2, e_3]$, $[f_1, f_2]$ och $[f_2, f_3]$. Dessa kan dock i sig ingå i nya bracketar, vilka vi också måste undersöka som potentiella baselement.

Vi studerar först bracketar mellan en av de ursprungliga generatorerna (h_i , e_i och f_i) och en av våra nyligen härledda kandidater från $\llbracket 2 \rrbracket$. Notera att

$$\begin{aligned} [f_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, f_i]] + [e_k, [f_i, e_j]] &\stackrel{(8)}{=} [f_i, [e_j, e_k]] + \delta_{ki}[e_j, h_i] - \delta_{ji}[e_k, h_i] \\ &\stackrel{(6)}{=} [f_i, [e_j, e_k]] - \delta_{ki}A_{ij}e_j + \delta_{ji}A_{ik}e_k \\ &\stackrel{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

där sista likheten implicerar att

$$[f_i, [e_j, e_k]] = \delta_{ki}A_{ij}e_j - \delta_{ji}A_{ik}e_k. \quad (12)$$

Element på formen $[f_i, [e_j, e_k]]$ är alltså linjärkombinationer av generatorer för A_3 . Motsvarande resonemang ger att även element på formen $[e_i, [f_j, f_k]]$ är uteslutna som baselement. Vidare är

$$\begin{aligned} [h_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, h_i]] + [e_k, [h_i, e_j]] &\stackrel{(6)}{=} [h_i, [e_j, e_k]] \\ &\quad - A_{ik}[e_j, e_k] + A_{ij}[e_k, e_j] \\ &= [h_i, [e_j, e_k]] - (A_{ik} + A_{ij})[e_j, e_k] \\ &\stackrel{(2)}{=} 0, \end{aligned}$$

vilket ger att

$$[h_i, [e_j, e_k]] = (A_{ik} + A_{ij})[e_j, e_k], \quad (13)$$

så att $[h_i, [e_j, e_k]]$ svarar mot linjärkombinationer av redan framtagna kandidater till baselement. Bracketar mellan h_i och $[f_j, f_k]$ elimineras likt ovan, men med hjälp av relation (7) istället för (6). Ytterligare fyra element kan strykas via

$$[e_1, [e_1, e_2]] = \text{ad}_{e_1}^2(e_2) = (\text{ad}_{e_1})^{1-A_{12}}(e_2) \stackrel{(9)}{=} 0$$

samt liknande räkningar som ger att

$$[e_2, [e_2, e_3]] = [f_1, [f_1, f_2]] = [f_2, [f_2, f_3]] = 0.$$

Efter detta återstår (i $\llbracket 3 \rrbracket$) endast $[e_1, [e_2, e_3]]$, $[e_3, [e_1, e_2]]$, $[f_1, [f_2, f_3]]$ samt $[f_3, [f_1, f_2]]$. Det första av dessa element är negationen av det andra, ty Jacobi-identiteten ger att

$$[e_1, [e_2, e_3]] \stackrel{(2)}{=} -[e_2, [e_3, e_1]] - [e_3, [e_1, e_2]] \stackrel{(9)}{=} -[e_3, [e_1, e_2]]. \quad (14)$$

Motsvarande relation gäller för $[f_1, [f_2, f_3]]$ och $[f_3, [f_1, f_2]]$ enligt

$$[f_1, [f_2, f_3]] \stackrel{(2)}{=} -[f_2, [f_3, f_1]] - [f_3, [f_1, f_2]] \stackrel{(10)}{=} -[f_3, [f_1, f_2]].$$

Elementen $[e_1, [e_2, e_3]]$ och $[f_1, [f_2, f_3]]$ kan dock ännu inte uteslutas.

Via räkningarna ovan har vi, utöver de nio ursprungliga generatorerna, funnit sex tänkbara baselement: $[e_1, e_2]$, $[e_2, e_3]$, $[f_1, f_2]$, $[f_2, f_3]$, $[e_1, [e_2, e_3]]$ och $[f_1, [f_2, f_3]]$. Dessa element bildar en mängd som vi kan kalla \mathcal{B}_{A_3} och som är en kandidat till en bas för A_3 . Som nämndes tidigare krävs av en bas att den är maximal och linjärt oberoende. Nedan behandlas det första villkoret utifrån induktionsbeviset som presenterades inledningsvis. Genom att testa alla möjliga former på bracketar i $\llbracket 1 \rrbracket$, $\llbracket 2 \rrbracket$ och $\llbracket 3 \rrbracket$ har vi visat att

$$\llbracket 1 \rrbracket \cup \llbracket 2 \rrbracket \cup \llbracket 3 \rrbracket \subseteq \text{span}(\mathcal{B}_{A_3}), \quad (15)$$

så \mathcal{B}_{A_3} respekterar induktionsantagandet. Det enda som återstår för att påvisa maximalitet är alltså att bevisa att alla bracketar mellan två element i \mathcal{B}_{A_3} tillhör $\text{span}(\mathcal{B}_{A_3})$. Vi börjar med bracketar mellan en generator och ett element i $\llbracket 3 \rrbracket$. Betrakta först $[e_i, [e_1, [e_2, e_3]]]$. För $i = 1$ är

$$\begin{aligned} [e_1, [e_1, [e_2, e_3]]] &\stackrel{(14)}{=} -[e_1, [e_3, [e_1, e_2]]] \\ &\stackrel{(2)}{=} [[e_1, e_2], [e_1, e_3]] + [e_3, [[e_1, e_2], e_1]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

På liknande sätt har vi, då $i = 3$, att

$$[e_3, [e_1, [e_2, e_3]]] \stackrel{(2)}{=} -[[e_2, e_3], [e_3, e_1]] - [e_1, [[e_2, e_3], e_3]] = 0.$$

Slutligen, för $i = 2$, använder vi att

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(9)}{=} [e_3, [e_2, [e_1, e_2]]] \\ &\stackrel{(2)}{=} -[[e_1, e_2], [e_3, e_2]] - [e_2, [[e_1, e_2], e_3]] \\ &\stackrel{(2)}{=} [[[e_3, e_2], e_1], e_2] + [[e_2, [e_3, e_2]], e_1] + [e_2, [[e_3, e_1], e_2]] + [e_2, [[e_2, e_3], e_1]] \\ &\stackrel{(9)}{=} -2[e_2, [e_1, [e_2, e_3]]], \end{aligned}$$

vilket ger att $[e_2, [e_1, [e_2, e_3]]] = 0$. Bracketar mellan f_i och $[e_1, [e_2, e_3]]$ elimineras sedan via

$$\begin{aligned} [f_i, [e_1, [e_2, e_3]]] &\stackrel{(2)}{=} -[[e_2, e_3], [f_i, e_1]] - [e_1, [[e_2, e_3], f_i]] \\ &\stackrel{(8)}{=} [[e_2, e_3], \delta_{1i} h_i] - [e_1, [[e_2, e_3], f_i]] \\ &\stackrel{(12)}{=} \delta_{1i} [[e_2, e_3], h_i] + \delta_{3i} A_{i2} [e_1, e_2], \end{aligned}$$

där sista uttrycket ju är en linjärkombination av element i $\llbracket 3 \rrbracket$ och $\llbracket 2 \rrbracket$. Även bracketar mellan h_i och $[e_1, [e_2, e_3]]$ måste tillhöra $\text{span}(\mathcal{B}_{A_3})$ eftersom

$$\begin{aligned} [h_i, [e_1, [e_2, e_3]]] &\stackrel{(2)}{=} -[[e_2, e_3], [h_i, e_1]] - [e_1, [[e_2, e_3], h_i]] \\ &\stackrel{(6)}{=} -[[e_2, e_3], A_{i1}e_1] - [e_1, [[e_2, e_3], h_i]] \\ &\stackrel{(13)}{=} A_{i1}[e_1, [e_2, e_3]] + [e_1, (A_{i3} + A_{i2})[e_2, e_3]] \\ &= (A_{i1} + A_{i2} + A_{i3})[e_1, [e_2, e_3]]. \end{aligned}$$

Alla resonemang ovan kring element i $\llbracket 4 \rrbracket$ är enkla att överföra till bracketar som involverar $[f_1, [f_2, f_3]]$ istället för $[e_1, [e_2, e_3]]$. Vi har därmed visat att samtliga element på formen $[u, v]$, där $u \in \llbracket 1 \rrbracket$ och $v \in \llbracket 3 \rrbracket$, tillhör det linjära höljet av \mathcal{B}_{A_3} . Det här resultatet kan användas för att även visa att övriga bracketar mellan element i \mathcal{B}_{A_3} tillhör $\text{span}(\mathcal{B}_{A_3})$. För detta behövs inte Chevalley-Serre-relationerna längre, utan det räcker med Jacobi-identiteten och mängdteoretiska argument. Exempelvis är bracketar på formen $[[\alpha, \beta], [\mu, \nu]]$ – där α, β, μ och ν är godtyckliga generatorer i $\llbracket 1 \rrbracket$ – linjärkombinationer av element i \mathcal{B}_{A_3} eftersom

$$[[\alpha, \beta], [\mu, \nu]] \stackrel{(2)}{=} [\nu, [\mu, [\alpha, \beta]]] - [\mu, [\nu, [\alpha, \beta]]],$$

varav högerledets termer är på den nyss definierade formen $[u, v]$, vilken vi visat tillhör $\text{span}(\mathcal{B}_{A_3})$. Liknande resonemang fungerar även för bracketar $[a, b]$, när

$$a \in \llbracket 1 \rrbracket \text{ och } b \in \llbracket 4 \rrbracket,$$

$$a \in \llbracket 2 \rrbracket \text{ och } b \in \llbracket 3 \rrbracket,$$

respektive

$$a \in \llbracket 3 \rrbracket \text{ och } b \in \llbracket 3 \rrbracket,$$

vilket täcker in samtliga återstående sätt att ta bracketar mellan två element i \mathcal{B}_{A_3} . Från detta får vi att bracketar mellan vilka två element som helst i \mathcal{B}_{A_3} tillhör denna mängds linjära hölje, och det följer att \mathcal{B}_{A_3} är maximal.

Observera att \mathcal{B}_{A_3} innehåller 15 element, det vill säga lika många som dimensionen av $\mathfrak{sl}(4)$. I nästa avsnitt visas en korrespondens mellan vart och ett av dessa element och våra baselement för $\mathfrak{sl}(4)$, vilket slutligen ger att \mathcal{B}_{A_3} är linjärt oberoende och alltså en bas för A_3 .

3.3 Identifiering av baselement för $\mathfrak{sl}(4)$ och A_3

Vi har nu en bas för $\mathfrak{sl}(4)$ och en kandidat till en bas för A_3 , men det återstår att visa hur elementen i dessa mängder svarar mot varandra.

Relation (5) uppfylls om vi låter h_i och h_j vara de diagonala matriserna i basen för $\mathfrak{sl}(4)$, så en första hypotes är att

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Genom att ta kommutatorn mellan dessa matriser och övriga element i basen för $\mathfrak{sl}(4)$ kan ytterligare kopplingar göras. Exempelvis är

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket svarar mot relation (6) om vi låter

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att relation (6) skall gälla generellt måste vidare

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

På liknande sätt krävs att

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

för att relation (7) skall vara uppfylld.

När väl matriserna som svarar mot h_i , e_i och f_i har identifierats beräknas matriserna för övriga element i \mathcal{B}_{A_3} genom att ta motsvarande kommutatorer. Vi har till exempel att

$$[e_1, e_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tabell 2: Utskrivna baselement för A_3 .

e_1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	e_2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	e_3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
f_1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	f_2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	f_3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
h_1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	h_2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	h_3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$[e_1, e_2]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$[e_2, e_3]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$[e_1, [e_2, e_3]]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$[f_1, f_2]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$[f_2, f_3]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$[f_1, [f_2, f_3]]$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Utifrån beräkningar likt ovan får vi en korrespondens mellan elementen i \mathcal{B}_{A_3} och vår bas för $\mathfrak{sl}(4)$. Mängden \mathcal{B}_{A_3} ”ärver” följaktligen det linjära oberoendet från basen för $\mathfrak{sl}(4)$, vilket implicerar att \mathcal{B}_{A_3} också är en bas. Matriserna för dess baselement presenteras i tabell 2. Vi ser där att e_i , och bracketarna av dessa baselement, svarar mot de övertriangulära matriserna i basen för $\mathfrak{sl}(4)$, att f_i och dess bracketar svarar mot de undertriangulära matriserna, samt att h_i svarar mot de diagonala matriserna.

3.4 Konstruktion av $\mathfrak{so}(4)$ och $\mathfrak{so}(1, 3)$

Liealgebran $\mathfrak{so}(4)$ utgörs av de antisymmetriska 4×4 -matriserna med reella matriselement. Vi får en bas för denna algebra genom att summera varje

Tabell 3: Utskrivna baselement för $\mathfrak{so}(4)$.

$$\begin{array}{ccc}
e_1 - f_1 & [e_1, e_2] + [f_1, f_2] & [e_1, [e_2, e_3]] - [f_1, [f_2, f_3]] \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e_3 - f_3 & [e_2, e_3] + [f_2, f_3] & e_2 - f_2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

övertriangulär matris i vår bas för $\mathfrak{sl}(4)$ med sitt negativa transponat. Varje baselement för $\mathfrak{so}(4)$ ges alltså som summan eller differensen mellan en över- och en undertriangulär matris från tabell 2. De sex baselement som erhålls på detta vis presenteras i tabell 3, tillsammans med motsvarande linjärkombinationer av baselementen för A_3 .

Den reella Liealgebran $\mathfrak{so}(1, 3)$ konstrueras på liknande sätt som $\mathfrak{so}(4)$ genom att para ihop en över- och en undertriangulär matris från tabell 2. Tecknen på de ingående termerna måste dock väljas så att Minkowski-metriken respekteras, vilket svarar mot att varje element i $\mathfrak{so}(1, 3)$ behöver vara på formen

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & x & y \\ b & -x & 0 & z \\ c & -y & -z & 0 \end{pmatrix},$$

där matriselementen är reella tal. Detta villkor leder oss till att definiera baselementen

$$\begin{cases} K_1 = e_1 + f_1 \\ K_2 = [e_1, e_2] + [f_1, f_2] \\ K_3 = [e_1, [e_2, e_3]] - [f_1, [f_2, f_3]] \\ J_1 = e_3 - f_3 \\ J_2 = [e_2, e_3] + [f_2, f_3] \\ J_3 = e_2 - f_2 \end{cases}, \quad (16)$$

vars matriser presenteras i tabell 4.

Tabell 4: Utskrivna baselement för Lorentzalgebran, $\mathfrak{so}(1, 3)$.

$$\begin{array}{ccc}
K_1 & K_2 & K_3 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
J_1 & J_2 & J_3 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

3.5 Härledning av den begränsade Lorentzgruppen

Vi skall nu använda de nyss framtagna baselementen för $\mathfrak{so}(1, 3)$ till att härleda generatorer för den begränsade Lorentzgruppen, i enlighet med proceduren som beskrivs i avsnitt 2.3. Låt θ vara en reell parameter och låt M vara ett godtyckligt baselement för $\mathfrak{so}(1, 3)$. Då är $e^{\theta M}$ en generator för en Liegrupp. Denna generator bestäms uttryckligen via potensserieutveckling av exponentialfunktionen:

$$\begin{aligned}
e^{\theta M} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k M^k}{k!} = E_4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k M^k}{k!} \\
&= E_4 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1} M^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{2j} M^{2j}}{(2j)!}, \tag{17}
\end{aligned}$$

där vi i sista likheten har delat upp den oändliga summan i två summor: en med de udda exponenterna $(2i+1)$ och en med de jämna $(2j)$. Detta visar sig vara en användbar omskrivning när vi nu låter M vara något av baselementen från tabell 4. Med

$$M = K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

är

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Att multiplicera M^2 med sig själv ger tillbaka M^2 , så $M^{2j} = (M^2)^j = M^2$ för alla $j \in \mathbb{Z}^+$. Det följer att $M^{2i+1} = M^{2i}M = M^2M = M^3 = M$ för alla

icke-negativa heltal i . Insättning av dessa uttryck för M^{2i+1} och M^{2j} i (17) ger den första generatoren

$$\begin{aligned} K'_x = e^{\theta M} &= E_4 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1} M}{(2i+1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{2j} M^2}{(2j)!} \\ &= E_4 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) M + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \right) M^2. \end{aligned}$$

De oändliga summorna svarar precis mot potensserieutvecklingarna för de hyperboliska funktionerna $\sinh \theta$ respektive $\cosh \theta - 1$, så

$$\begin{aligned} K'_x &= E_4 + (\sinh \theta)M + (\cosh \theta - 1)M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \cosh \theta - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ytterligare två generatorer erhålls på liknande sätt, ty de båda sambanden $M^{2i+1} = M$ och $M^{2j} = M^2$ gäller även då M är lika med baselementen K_2 respektive K_3 . Med

$$M = K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi därmed generatoren

$$K'_y = E_4 + (\sinh \theta)M + (\cosh \theta - 1)M^2 = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och med

$$M = K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$K'_z = E_4 + (\sinh \theta)M + (\cosh \theta - 1)M^2 = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Det återstår tre baselement att exponentiera. Sätt först

$$M = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = -M, \quad M^4 = -M^2 \text{ och } M^5 = M,$$

vilket implicerar att $M^{2i+1} = (-1)^i M$ och $M^{2j} = (-1)^j (-M^2)$, för varje icke-negativt heltal i och varje $j \in \mathbb{Z}^+$. Dessa samband gäller även då M är lika med J_1 eller J_2 . Insättning av $M^{2i+1} = (-1)^i M$ och $M^{2j} = (-1)^j (-M^2)$ i (17) ger följaktligen att de kvarvarande generatorerna kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} J &= E_4 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1}(-1)^i M}{(2i+1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{2j}(-1)^j (-M^2)}{(2j)!} \\ &= E_4 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{2i+1}(-1)^i}{(2i+1)!} \right) M + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{2j}(-1)^j}{(2j)!} \right) (-M^2) \\ &= E_4 + (\sin \theta)M + (\cos \theta - 1)(-M^2). \end{aligned}$$

De tre sista generatorerna är alltså

$$\begin{aligned} J'_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (\cos \theta - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J'_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (\cos \theta - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
J'_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (\cos \theta - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi ser att de erhållna matriserna har samma form som boost- och rotationsmatriserna definierade för Lorentzgruppen i avsnitt 2.4, så när som på tecknen på vissa matriselement. Detta är dock bara en skenbar diskrepans eftersom mängden av matriser representerad av K_w är identisk med K'_w för alla $w \in \{x, y, z\}$, och på motsvarande sätt är $J_w = J'_w$. Att så är fallet följer av att θ kan ersättas med $-\theta$ i K'_w och J'_w (ty $-\theta$ är lika mycket en reell parameter som θ). Då förblir $\cos \theta$ och $\cosh \theta$ oförändrade, medan $\sin \theta$ och $\sinh \theta$ växlar tecken så att K'_w och J'_w ser likadana ut som K_w och J_w . De matriser som vi har tagit fram genom exponentiering av Lorentzalgebran är alltså verkligen generatorer för den begränsade Lorentzgruppen.

3.6 $\mathfrak{so}(1, 3)$ som reell form av D_2

Den abstrakta Liealgebran D_2 är halvenkel, vilket framgår av dess tudelade Dynkindiagram:

$$\begin{array}{cc}
\bullet & \bullet \\
1 & 2
\end{array}$$

Var och en av noderna svarar mot Liealgebran A_1 , och D_2 är följaktligen lika med den direkta summan $A_1 \oplus A_1$. Som alltid finns det tre generatorer per nod, och vi betecknar dessa med samma bokstäver som tidigare, men nu med versaler. Den ena kopian av A_1 genereras alltså av $\mathcal{G}_1 = \{E_1, F_1, H_1\}$, medan den andra genereras av $\mathcal{G}_2 = \{E_2, F_2, H_2\}$. Observera att generatorerna i \mathcal{G}_1 måste vara algebraiskt isolerade från de i \mathcal{G}_2 , så att $[X, Y] = 0$ för alla $X \in \mathcal{G}_1$ och alla $Y \in \mathcal{G}_2$. Vidare måste vardera uppsättning generatorer uppfylla Chevalley-Serre-relationerna för A_1 . Serre-relationerna, (9)

Tabell 5: Generatorer för D_2 i termer av baselement för $\mathfrak{so}(1, 3)$.

E_1	$\frac{1}{2}(K_3 + J_2 + i(K_2 + J_3))$
F_1	$\frac{1}{2}(K_3 - J_2 + i(-K_2 + J_3))$
H_1	$\frac{1}{2}(K_1 + iJ_1)$
E_2	$\frac{1}{2}(-K_3 + J_2 + i(-K_2 - J_3))$
F_2	$\frac{1}{2}(-K_3 - J_2 + i(K_2 - J_3))$
H_2	$\frac{1}{2}(-K_1 + iJ_1)$

och (10), är i detta fall inte tillämpbara och (5) är trivial när det handlar om en nod. De återstående Chevalley-relationerna reduceras till

$$[E_i, F_i] = H_i, \quad (18)$$

$$[H_i, E_i] = 2E_i, \quad (19)$$

och

$$[H_i, F_i] = -2F_i, \quad (20)$$

där vi har använt att Cartanmatrisen för A_1 är en 1×1 -matris med elementet 2. Ekvationerna ovan implicerar att alla möjliga bracketar mellan element i $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ är en multipel av en generator i denna mängd. Det finns alltså inga ytterligare baselement som kan bildas genom att ta bracketar av de ursprungliga generatorerna. Det följer att $\dim(D_2) = |\mathcal{G}| = 6$, så att generatorerna även är baselement i vanlig bemärkelse.

Målet med detta avsnitt är att koppla den nyss definierade, abstrakta Liealgebran D_2 till de övriga algebrorna som vi har gått igenom. Närmare bestämt vill vi visa att Lorentzalgebran är en reell form av D_2 , eller med andra ord, att D_2 är isomorf med komplexifikationen av $\mathfrak{so}(1, 3)$. Denna komplexifikation, $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}}$, består per definition av $\{x + yi \mid x, y \in \mathfrak{so}(1, 3)\}$, det vill säga alla komplexa linjärkombinationer av elementen i $\mathfrak{so}(1, 3)$. Dimensionerna är lika för D_2 och $\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}}$, så de båda algebrorna är isomorfa med varandra om det går att uttrycka baselementen i \mathcal{G} som komplexa linjärkombinationer av baselementen för $\mathfrak{so}(1, 3)$. Vi söker alltså en uppsättning om sex sådana linjärkombinationer, vars motsvarande matriser uppfyller samma relationer som generatorerna i \mathcal{G} .

Genom att testa olika linjärkombinationer konstruerades baser för A_1 , det vill säga mängder om tre element, E_i , F_i och H_i , som uppfyller ekvationerna (18), (19) och (20). Baserna jämfördes sedan parvis för att se om de kommuterade med varandra i enlighet med villkoret $[X, Y] = 0$. Till slut erhöles en bas med de sökta egenskaperna. Linjärkombinationerna för

$$\begin{array}{ccc}
D_2 & & \\
\downarrow \varphi_{\mathbb{R}} & \swarrow \varphi_{\mathbb{C}} & \\
\varphi_{\mathbb{R}}(D_2) & \supset & \mathfrak{so}(1,3)
\end{array}$$

Figur 3: Relationerna mellan D_2 , dess realifikation $\varphi_{\mathbb{R}}(D_2)$ och $\mathfrak{so}(1,3)$. Vi ser att D_2 är komplexifikationen av $\mathfrak{so}(1,3)$, som alltså är en reell form av den förstnämnda algebran.

denna bas presenteras i tabell 5 i termer av baselementen för $\mathfrak{so}(1,3)$. Motsvarande matriser är utskrivna i tabell 6. Om vi manipulerar uttrycken i tabell 5 kan baselementen i $\mathfrak{so}(1,3)$ istället uttryckas som komplexa linjärkombinationer av generatorerna i \mathcal{G} , vilket visar att $\mathfrak{so}(1,3)$ verkligen är en delalgebra till (en isomorfi av) realifikationen av D_2 . De nyligen härledda relationerna sammanfattas i figur 3, i analogi med figur 2 från avsnittet om reella former.

Tabell 6: Utskrivna baselement/generatorer för D_2 .

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} E_1 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} &
\begin{array}{c} F_1 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -i & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} &
\begin{array}{c} H_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{c} E_2 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} &
\begin{array}{c} F_2 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} &
\begin{array}{c} H_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\end{array}$$

3.7 Abstrakt konstruktion av $\mathfrak{so}(4)$ och $\mathfrak{so}(1,3)$

Vår konstruktion av en bas för $\mathfrak{so}(4)$ i avsnitt 3.4 utgick från villkoren på dess matriser (antisymmetri), men just i detta fall är det även enkelt att bilda $\mathfrak{so}(4)$ inom ramen för den abstrakta teorin för komplexa Liealgebror. Vi har nämligen att $\mathfrak{so}(4)$ är den maximala kompakta delalgebran till $\mathfrak{sl}(4) \cong A_3$ och då ger teorin i avsnitt 2.7 att $\mathfrak{so}(4)$ är isomorf med fixpunktsmängden av Chevalley-involutionen (11), applicerad på A_3 . Vidare bildar $e_1 - f_1$, $e_2 - f_2$ och $e_3 - f_3$ en fullständig uppsättning generatorer för algebran. Att så är fallet framgår om vi jämför med baselementen som vi

tog fram för $\mathfrak{so}(4)$ (tabell 3). Där återfinns de nyss nämnda generatorerna, men även tre ytterligare baselement. De senare kan dock härledas genom att ta bracketar av $e_1 - f_1$, $e_2 - f_2$ och $e_3 - f_3$:

$$\begin{aligned} [e_1 - f_1, e_2 - f_2] &= [e_1, e_2] + [e_1, -f_2] + [-f_1, e_2] + [-f_1, -f_2] \\ &\stackrel{(8)}{=} [e_1, e_2] + [f_1, f_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_2 - f_2, e_3 - f_3] &= [e_2, e_3] + [e_2, -f_3] + [-f_2, e_3] + [-f_2, -f_3] \\ &\stackrel{(8)}{=} [e_2, e_3] + [f_2, f_3] \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} [e_1 - f_1, [e_2, e_3] + [f_2, f_3]] &= [e_1, [e_2, e_3]] + [e_1, [f_2, f_3]] \\ &\quad + [-f_1, [e_2, e_3]] + [-f_1, [f_2, f_3]] \\ &\stackrel{(2)}{=} [e_1, [e_2, e_3]] - [f_3, [e_1, f_2]] - [f_2, [f_3, e_1]] \\ &\quad + [e_3, [f_1, e_2]] + [e_2, [e_3, f_1]] - [f_1, [f_2, f_3]] \\ &\stackrel{(8)}{=} [e_1, [e_2, e_3]] - [f_1, [f_2, f_3]]. \end{aligned}$$

Matrisalgebran $\mathfrak{so}(4)$ genereras alltså av matrisrepresentationer av $e_1 - f_1$, $e_2 - f_2$ och $e_3 - f_3$, och den måste därmed vara isomorf med den maximala kompakta delalgebran till A_3 .

Lorentzalgebran är uppenbarligen inte invariant under en Chevalley-involution (i så fall skulle $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(1, 3)$). Med utgångspunkt i sambanden i (16) mellan baselementen för $\mathfrak{so}(1, 3)$ och generatorerna för A_3 kan vi emellertid definiera $\mathfrak{so}(1, 3)$ som fixpunktsmängden av en annan involution:

$$e_1 \mapsto f_1, \quad f_1 \mapsto e_1, \quad e_j \mapsto -f_j, \quad f_j \mapsto -e_j \quad \text{och} \quad h_i \mapsto -h_i \quad (21)$$

för $i \in \{1, 2, 3\}$ och $j \in \{2, 3\}$. På så vis tillåter även Lorentzalgebran en abstrakt konstruktion, utan hänvisning till egenskaper hos matriser.

4 Bortom rumtidssymmetrier

I det föregående har vi kopplat teorin för Liealgebror och Liegrupper till Lorentzinvarians, men detta är bara en av många fysikaliska symmetrier som kan beskrivas med hjälp av den matematik som vi har gått igenom. Nedan diskuteras ytterligare ett par exempel översiktligt.

4.1 Gaugesymmetri

Hittills har vi tolkat alla symmetritransformationer som att de verkar *globalt*, det vill säga, att de transformerar det underliggande fysikaliska systemet (till exempel rumtiden) på samma sätt i varje punkt. Det finns

emellertid även *lokala* symmetrier som kännetecknas av att symmetritransformationerna beror på rumtidskoordinaterna, och alltså kan se olika ut från punkt till punkt. Detta är karaktäristiskt för så kallade *gaugetransformationer*. Liegrupper av sådana transformationer kallas *gaugegrupper* och invariants under en uppsättning gaugetransformationer benämns som *gaugesymmetri*.

Gaugesymmetri är ett grundläggande koncept inom standardmodellen, vilken är den dominerande teorin för elementarpartiklarna samt tre av de fyra fundamentala krafterna. Den fullständiga symmetrigruppen är i detta fall $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, där Liegrupperna $SU(3)$, $SU(2)$ och $U(1)$ svarar mot var sin gaugesymmetri hos naturlagarna. Fysikaliskt kopplas dessa Liegrupper, i tur och ordning, till den starka kärnkraften, den svaga kärnkraften respektive den elektromagnetiska kraften, krafter som förmedlas av var sin klass av partiklar: gluoner, W- och Z-bosoner respektive fotoner. Existensen av sådana förmedlarpartiklar var en förutsägelse som först gjordes utifrån rent teoretiska beskrivningar av gaugesymmetrier.

4.2 Supergravitation

Ett annat exempel på lokal symmetri finns inom supergravitation. Det är en klass av teorier där allmän relativitetsteori kombineras med supersymmetri, vilket är en hypotetisk symmetri mellan materie- och förmedlarpartiklarna (mellan fermioner och bosoner). Supergravitation i fyra dimensioner formulerades för första gången 1979 av Cremmer och Julia [6] (se exempelvis [7] för en översikt). Teorin utgår från en Lagrangian som globalt är invariant under symmetritransformationerna som utgör Liegruppen till den exceptionella Liealgebran E_7 . Lagrangianen respekterar dock även en lokal symmetri som svarar mot Liegruppen $SU(8)$. Dess Liealgebra, $\mathfrak{su}(8)$, är den maximala, kompakta delalgebran till E_7 och kan alltså konstrueras via en Chevalley-involution, likt vi konstruerade $\mathfrak{so}(4)$ från A_3 i avsnitt 3.7.

Relationen mellan den globala symmetrin E_7 och den lokala symmetrin $SU(8)$ har en parallell i allmän relativitetsteori, där $\mathfrak{sl}(4)$ -delen av $\mathfrak{gl}(4)$ svarar mot en global symmetri och $\mathfrak{so}(1, 3)$ svarar mot en lokal symmetri (en lokal Lorentzinvariants). I båda teorier erhålls algebran för den lokala symmetrin som fixpunktsmängden av en involution av algebran för den globala symmetrin. Liealgebrorna E_7 och $\mathfrak{su}(8)$ spelar alltså i någon mån samma roll i supergravitation som $\mathfrak{sl}(4)$ och Lorentzalgebran spelar i allmän relativitetsteori. Analogin bryts emellertid något av att $\mathfrak{so}(1, 3)$, till skillnad från $\mathfrak{su}(8)$, inte är kompakt. Därmed definieras $\mathfrak{so}(1, 3)$ – som vi såg i avsnitt 3.7 – utifrån automorfin (21) istället för en ren Chevalley-involution.

5 Diskussion och slutsats

I det här arbetet har vi visat hur fysikaliska symmetritransformationer anknyter till teorin för Liealgebror, en koppling som gjordes konkret genom vår härledning av den begränsade Lorentzgruppen, med utgångspunkt i den abstrakt definierade, komplexa Liealgebran A_3 . Ytterligare Liealgebror och relationer studerades längs vägen, ständigt ur två olika perspektiv: dels utifrån Dynkindiagram och generatorer, dels utifrån baser av matriser. Av dessa visade sig särskilt det senare perspektivet användbart för att påvisa olika samband, eftersom det tillät enkla beräkningar av bracketar via matrismultiplikation. Det var också via detta perspektiv som vi fick fram matriser för att generera den begränsade Lorentzgruppen; generatorer som på ett naturligt sätt kan tolkas som olika sorters Lorentztransformationer.

Möjligheten att betrakta elementen i en Liegrupp eller en Liealgebra som linjära transformationer av ett vektorrum är en stor anledning till varför dessa strukturer är fysikaliskt användbara. Därmed är det inte konstigt att matrisalgebrorna, i det föregående, utgjorde ett så viktigt verktyg för att förstå Liealgebrornas plats inom fysik. Det är dock intressant att beakta att exempelvis Lorentzalgebrans roll som reell form av D_2 lika väl hade kunnat visas abstrakt, utifrån generatorerna för A_3 och de tillhörande Chevalley-Serre-relationerna, även om detta hade varit mer omständligt.

Som vi har sett är det ofta genom matrisrepresentationer som den fysikaliska tolkningen av Liealgebror blir tydlig. Teorin för halvenkla, komplexa Liealgebror är emellertid fortfarande viktig för att förstå den matematiska grund på vilken en stor del av den moderna fysiken vilar. Behovet av den abstrakta teorin är inte minst framträdande i fysikaliska modeller som supergravitation (se avsnitt 4.2), där exceptionella Liealgebror är centrala. I avsnitt 2.5 konstaterade vi att dessa algebror ofta har relativt komplicerade matrisrepresentationer och följaktligen tenderar konstruktionen från Dynkindiagrammen att hamna i fokus. Då krävs andra tekniker än explicita matrisberäkningar; tekniker som vår abstrakta härledning av $\mathfrak{so}(1, 3)$ från A_3 i avsnitt 3.7 gav prov på. Som en fortsättning på nuvarande arbete vore det därför intressant att studera det abstrakta perspektivet närmre i våra enkla fall, för att bättre förstå de metoder som behövs när det inte finns lämpliga matrisalgebror att tillgå.

Referenser

- [1] E. Noether, "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, s. 235–257, 1918. URL: <http://eudml.org/doc/59024>.
- [2] J. Fuchs och C. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations: A Graduate Course for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3] L. Frappat, A. Sciarrino och P. Sorba, *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*. San Diego: Academic Press, 2000.
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [5] G. B. Arfken, H. J. Weber och F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7. utg. Amsterdam: Elsevier, 2013.
- [6] E. Cremmer och B. Julia, "The $SO(8)$ Supergravity," *Nuclear Physics B*, årg. 159, nr 1–2, s. 141–212, nov. 1979. DOI: 10.1016/0550-3213(79)90331-6.
- [7] H. Samtleben, "Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications," *Classical and Quantum Gravity*, årg. 25, nr 21, okt. 2008. DOI: 10.1088/0264-9381/25/21/214002.